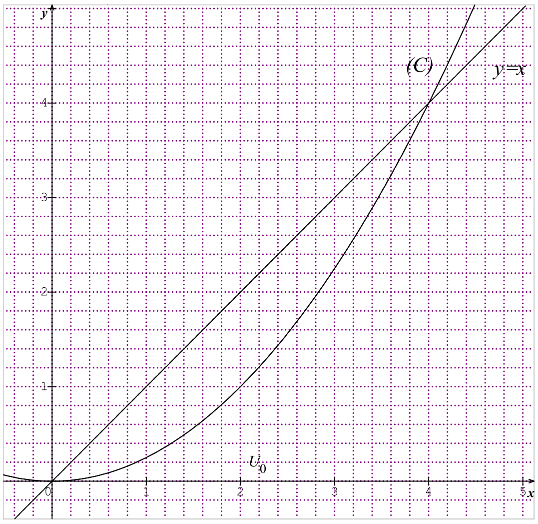
Lycée Farhat Hached - Rades | *2009-2010*
Durée 2h00 | *$3^{ème}$ Tech3*

Devoir de Synthèse N°2
Mathématiques



Exercice 1 (5 points)

1) (U_n) la suite définie par :

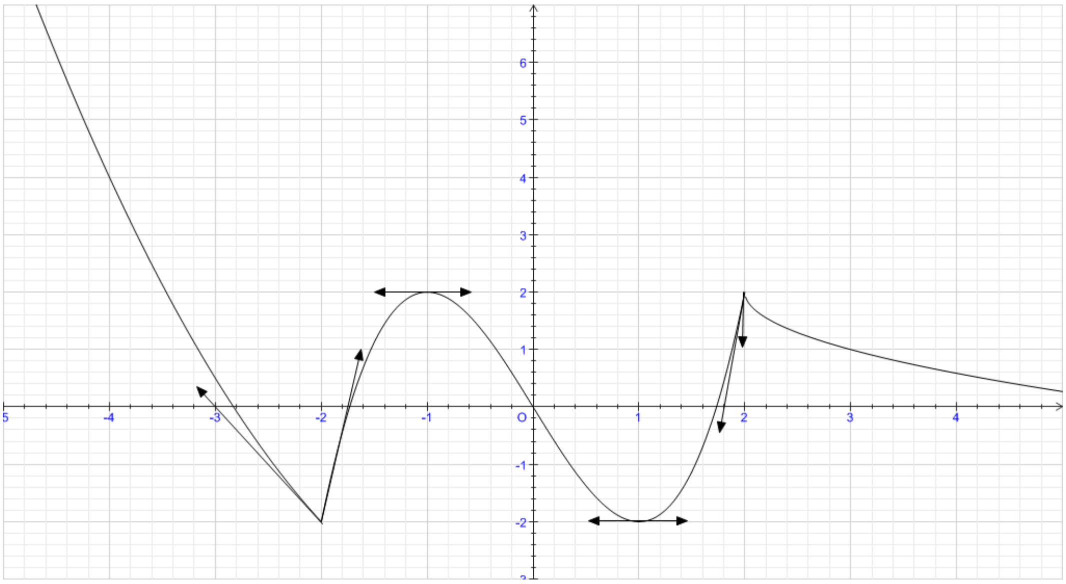
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, \quad n\in\mathbb{N}$$

(C) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Après avoir représenté les 5 premiers termes de la suite (U_n) dire si la suite est :

a) croissante b) décroissante c) constante.

2) la figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



A l'aide du graphique déterminer : $f'_d(-2)$ et $f'_g(-2)$.

3) Cocher la bonne réponse :

a) Le nombre de solution de l'équation f'(x)=0 est :

☐ une seule solution.

☐ quatre solutions.

☐ deux solutions.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+2}{x-1} =$

☐ $+\infty$.

☐ $-\infty$.

☐ 0.

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-2}{x-2} =$

☐ $+\infty$.

☐ $-\infty$.

☐ 0.

Exercice 3: (2 points)

Soit f la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{x^2+bx+c}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et calculer f'(x).
2) déterminer b et c pour que les conditions suivantes soient réalisées :
   - La courbe C passe par le point A(3,0).
   - La courbe C admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.

Dans la suite on prend b=-6 et c=9.

3) Déterminer les points de C où la tangente est parallèle à $\Delta : 3x-4y+1=0$.
4) a) Vérifier que $f(x)=x-4-\dfrac{1}{x-2}$.

   b) En déduire que C admet une asymptote oblique D que l'on déterminera.
5) Soit g la fonction définie par $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x>3 \\ \sqrt{x^2-8x+15} & \text{si } x \le 3 \end{cases}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b) Etudier la continuité de g en 3.
   c) Etudier la dérivabilité de g en 3. Interpréter graphiquement le résultat.
   d) Montrer que la droite D' :y=-x+4 est une asymptote à C au voisinage de $(-\infty)$.

Exercice 3: (5 points)

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{2U_n+1}{U_n+2} & n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}=2-\dfrac{3}{U_n+2}$
2) Montrer que la suite pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le U_n \le 1$
3) Montrer que la suite pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}\ge U_n$
4) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n+1}$.
   a) Montrer que V est une suite géométrique.
   b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 : (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(1, 1), B(0, 2) et C(1 ; $4-\sqrt{3}$)

1) a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

   b) Calculer AB et AC.

   c) Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire cos($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
2) a) Déterminer l'ensemble des points M(x, y) tel que $MA^2+MB^2=8$.

   b) Déterminer l'ensemble des points M(x, y) tel que $MA^2-MB^2=8$.